Breddintro 2011
Delprov 3 : Løsningsforslag

1. a) $$\lim_{x\to -2} \frac{2x^2-8}{3x+6} = \lim_{x\to -2} \frac{2(x^2-4)}{3(x+2)} =$$

$$= \lim_{x\to -2} \frac{2\cancel{(x+2)}(x-2)}{3\cancel{(x+2)}} = \lim_{x\to -2} \frac{2(x-2)}{3} = -\frac{8}{3}$$

b) $$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+10}{3x^2+5x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(5+\frac{10}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(3+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{5}{3}$$

c) $$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+5x^2}-\sqrt{2x^2+1}}{4x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+5x^2}-\sqrt{2x^2+1}\right)\left(\sqrt{1+5x^2}+\sqrt{2x^2+1}\right)}{4x^2\left(\sqrt{1+5x^2}+\sqrt{2x^2+1}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1+5x^2-(2x^2+1)}{4x^2\left(\sqrt{1+5x^2}+\sqrt{2x^2+1}\right)} = \lim_{x\to 0} \frac{3\cancel{x^2}}{4\cancel{x^2}\left(\sqrt{1+5x^2}+\sqrt{2x^2+1}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3}{4(\sqrt{1}+\sqrt{1})} = \frac{3}{4\cdot 2} = \frac{3}{8}$$

2a) f <u>är injektiv</u>, ty antag

$$f(x_1) = f(x_2)$$
$$3x_1 - 1 = 3x_2 - 1$$
$$3x_1 = 3x_2$$
$$x_1 = x_2$$

f är <u>inte surjektiv</u>, ty antag

$$f(x) = 0 \qquad (0 \in \mathbb{R})$$

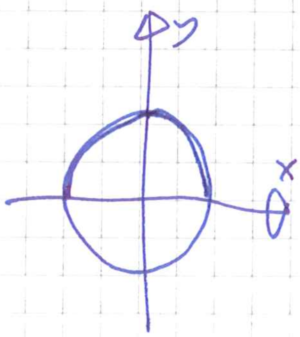
då

$$3x - 1 = 0$$
$$3x = 1$$
$$x = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$$

b) g är <u>inte injektiv</u>, ty tag

$$0, \pi \in [0, \pi]$$
$$0 \neq \pi \text{ med } \sin 0 = \sin \pi = 0$$

g är <u>inte surjektiv</u>, ty $\sin x \geq 0$ $\forall x \in [0, \pi]$



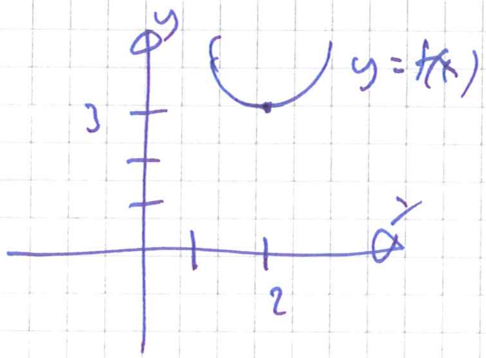
dvs $\sin x = -\frac{1}{2}$ har ingen lösning där.

3a) $f(x) = x^2 - 4x + 7$

kvadratkomplettering ger $x^2 - 4x + 4 - 4 + 7 =$

$= (x-2)^2 + 3$

Så $f(x)$ har vertex i $(2,3)$ och eftersom kvadrattermen är positiv så är den "konkav uppåt"



Alltså har vi att undre gränsen för R_f är 3.

Övregräns hittar vi bland ändpunkter

$f(-1) = (-1)^2 - 4(-1) + 7 = 1 + 4 + 7 = 12$

$f(6) = 6^2 - 4 \cdot 6 + 7 = 36 - 24 + 7 = 19$

Så $R_f = [3, 19]$

f är inte injektiv ty

$f(1) = f(3) = 4$

men $1 \neq 3$.

3b) $g(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \quad x \geq 1$

Så $g(x)$ vertex är $(1, 0)$, g konkav uppåt och då $R_g = [0, \infty)$

Polynom är kontinuerliga så vi vet att varje värde i R_g antas, alltså är g surjektiv

g injektiv ty antag $g(x_1) = g(x_2) \quad x_1, x_2 \geq 1$

$$(x_1 - 1)^2 = (x_2 - 1)^2$$

$$x_1 - 1 = x_2 - 1 \quad \text{ty } x_1, x_2 \geq 1$$

$$x_1 = x_2$$

Alltså är g bijektiv och har då en invers.

Vi bestämmer den.

$$y = (x-1)^2$$

$$\sqrt{y} = x - 1$$

$$x = \sqrt{y} + 1$$

och $g^{-1}(x) = \sqrt{x} + 1$

$$D_{g^{-1}} = R_g = [0, \infty)$$

$$R_{g^{-1}} = D_g = [1, \infty)$$

4) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\qquad g(x) = 2x - 3$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(2x-3) = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$$

$f \circ g$ är def. då $\quad 2x - 3 > 0$

$$2x > 3$$

$$x > \frac{3}{2}$$

dvs $\quad D_{f \circ g} = \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$

$f \circ g(x)$ är strängt avtagande.

Eftersom $D_{f \circ g}$ är ett öppet intervall får vi beräkna $R_{f \circ g}$ mha gränsvärden

- $\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}} \to \infty$ då $x \to \frac{3}{2}^{+}$

- $\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}} \to 0$ då $x \to \infty$

Så $\quad R_{f \circ g} = (0, \infty)$

5a) En funktion $f(x)$ är kontinuerlig i punkten $x=a$ om

1) $f(x)$ är def. i $x=a$
2) $\lim_{x \to a} f(x)$ existerar, och är lika med $f(a)$.

1p

b) (i) $\lim_{x \to 3^-} (4x - x^2 + 5) = 12 - 9 + 5 = 8$

$e^{\ln(x+6)} = x + 6$

$\lim_{x \to 3^+} (x+6) = 3 + b$

(ii) så $a = 8$

och $3 + b = 8$

dvs $a = 8$

$b = 5$

6a) Vi har $-1 \leq \frac{x}{|x|} \leq 1$

men får sedan betrakta två fall

1) För positiva x nära 0 gäller

$$-\sin x \leq \frac{x \sin x}{|x|} \leq \sin x$$

2) För negativa x nära 0 gäller

$$-\sin x \geq \frac{x \sin x}{|x|} \geq \sin x$$

Eftersom $\lim_{x \to 0} -\sin x = \lim_{x \to 0} \sin x = 0$

så ger då instängningssatsen att

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \sin x}{|x|} = 0$$

b) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} \sin 3x - \sin 3x}{12x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x \left(e^{2x} - 1\right)}{12x^2} =$

$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{e^{2x} - 1}{2x} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

(standardgränsvärden)