

Introduktionskurs i matematik, v.t. 2011. Deltentamen 3.

Hjälpmedel: Icke formelhanterande miniräknare. Formelsamling för gymnasiet.
Skrivtid: 3 timmar; Max: 15 poäng Tomas Nilson, Mittuniversitetet.

Aspektuppgiften, markerad A, kan höja betyget om den utförs väl med god motivering.

Lösningarna skall presenteras på ett sådant sätt att uträkningar och resonemang blir lätta att följa. Avsluta varje lösning med ett tydligt angivet svar. Skriv endast på en sida.

(1) Bestäm följande gränsvärden:

$$(a) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 - 8}{3x + 6} \quad (1p)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 + 10}{3x^2 + 5x - 1} \quad (1p)$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+5x^2} - \sqrt{2x^2+1}}{4x^2} \quad (1p)$$

(2) Avgör för följande funktioner om de är injektiva eller inte, om de är surjektiva eller inte. Motivera dina svar.

$$(a) f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ där } f(x) = 3x - 1; \quad (1p)$$

$$(b) g : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1], \text{ där } g(x) = \sin x; \quad (1p)$$

(3) (a) Låt $f : [-1, 6] \rightarrow R_f$ vara funktionen $f(x) = x^2 - 4x + 7$. Ange funktionens värdemängd R_f och förklara varför f inte är inverterbar. (1p)

(b) Betrakta funktionen $g : x^2 - 2x + 1, \quad x \geq 1$.
Ange funktionens värdemängd R_g och förklara varför $g : [1, \infty) \rightarrow R_g$ är inverterbar. Bestäm också g 's invers och ange inversens definitionsmängd och värdemängd. (2p)

(4) Låt $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ och $g(x) = 2x - 3$. Bestäm $f \circ g(x)$ samt dess definitionsmängd $\mathcal{D}_{f \circ g}$ och värdemängd $\mathcal{R}_{f \circ g}$. (2p)

(5) (a) Definiera med hjälp av gränsvärden när en funktion f sägs vara kontinuerlig i punkten $x = a$. (1p)

(b) Låt a och b vara reella konstanter och låt

$$f(x) = \begin{cases} 4x - x^2 + 5, & \text{om } x < 3; \\ a, & \text{om } x = 3; \\ e^{\ln(x+b)}, & \text{om } x > 3. \end{cases}$$

(i) Beräkna vänstergränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$
och högergränsvärdet $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$. (1p)

(ii) Bestäm a och b så att $f(x)$ blir kontinuerlig i $x = 3$. (1p)

(6) (a) Använd instängningssatsen för att beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{|x|}$. (1p)

(b) Beräkna $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} \sin(3x) - \sin(3x)}{12x^2}$. (1p)

A. För ett andragradspolynom $f(x) = x^2 + px + q$ med nollställen x_1 och x_2 gäller följande samband mellan nollställen och koefficienter

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{och} \quad x_1 x_2 = q.$$

Härled motsvarande samband mellan nollställen och koefficienter för tredjegrads-
polynomet

$$p(x) = x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0.$$

Lycka till!

Några standardgränsvärden

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} &= 1 \end{aligned}$$