

**MA INTRO: NÅGRA REPUPPGIFTER INFÖR DELPROV 3,  
2011**

På det avslutande provet kommer vi att fokusera på det vi gått igenom under veckorna 17-19. Observera att detta inte är ett testprov med avvägd samman- tagen svårighetsgrad, utan uppgifterna är bara till för att påminna om detta material. Sedan kan man naturligtvis även få användning för sådant man lärt sig tidigare.

- (1) Låt  $f(x) = x^2 - 3x + 5$ . Antag att  $g(x)$  har en graf som ser ut precis som grafen till  $f(x)$ , fast translaterad 3 steg till höger i  $x$ -led och 2 steg upp i  $y$ -led. Bestäm  $g(x)$ .
- (2) Låt  $f(x) = \sqrt{x}$  och  $g(x) = x^2 - 1$ .
  - a) Bestäm  $f \circ g(x)$  med definitionsmängd och värdemängd.
  - b) Bestäm  $g \circ f(x)$  med definitionsmängd och värdemängd.
- (3) Låt  $X = \{1, 2, 3\}$  och  $Y = \{a, b, c, d\}$ .
  - a) Definiera själv en funktion  $f : X \rightarrow Y$  som är injektiv.
  - b) Går det att definiera en bijektiv funktion  $g : X \rightarrow Y$ ?
- (4) Låt  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vara funktionen
$$f(x) = x^3 - 4x.$$
Visa att  $f$  inte är inverterbar.
- (5) Låt  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vara funktionen
$$g(x) = x^3 - 1.$$
  - a) Visa att  $g$  är inverterbar.
  - b) Bestäm  $g$ 's invers.
- (6) Ange definitionsmängd och värdemängd för

a)  $f(x) = \sin^{-1}(x)$ ,

b)  $f(x) = \cos^{-1}(x)$ ,

b)  $f(x) = \tan^{-1}(x)$ .

(7) Bestäm om möjligt gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2}.$$

(8) Bestäm om möjligt gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2}{x - x^2}.$$

(9) Bestäm om möjligt gränsvärdet

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}.$$

(10) Använd standardgränsvärdet  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  för att beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{5x}.$$

(11) Låt

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & \text{om } x \neq 3; \\ a & \text{om } x = 3. \end{cases}$$

Bestäm  $a$  så att  $f(x)$  är kontinuerlig i  $x = 3$ .(12) Antag att  $f(x)$  är kontinuerlig på intervallet  $[a, b]$  och att  $f(a) = -2$ ,  $f(b) = 1$ . Vad kan vi då säga om ekvationen  $f(x) = 0$ ?

(13) Använd instängningsatsen för att beräkna

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{2}{x}.$$

Svar

- (1)  $g(x) = x^2 - 9x + 25$ .
- (2) a)  $f \circ g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ ,  $\mathcal{D}_{f \circ g} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ ,  $\mathcal{R}_{f \circ g} = [0, \infty)$ .  
 b)  $g \circ f(x) = |x| - 1$ ,  $\mathcal{D}_{g \circ f} = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{R}_{g \circ f} = [-1, \infty)$ .
- (3) a) Till exempel  $f(1) = a$ ;  $f(2) = b$ ;  $f(3) = c$ .  
 b) Nej, eftersom  $|X| = 3 < 4 = |Y|$ , så kan man inte träffa alla element i  $Y$ . Funktionen kan aldrig vara surjektiv och därmed inte bijektiv.
- (4)  $f(-2) = 0$  och  $f(2) = 0$ , men  $-2 \neq 2$ , så  $f$  är inte injektiv.
- (5) a) Ekvationen  $x^3 - 1 = k$  har lösning  $(k + 1)^{1/3}$ ,  $\forall k \in \mathbb{R}$ , alltså är  $g$  surjektiv. Att  $g$  är injektiv ser vi genom att först anta  $x_1^3 - 1 = x_2^3 - 1$ , och sedan förenkla detta till  $x_1 = x_2$ .  
 b)  $g^{-1}(x) = (x + 1)^{\frac{1}{3}}$ .
- (6) a)  $\mathcal{D}_{\sin^{-1}} = [-1, 1]$ ,  $\mathcal{R}_{\sin^{-1}} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ;  
 b)  $\mathcal{D}_{\cos^{-1}} = [-1, 1]$ ,  $\mathcal{R}_{\cos^{-1}} = [0, \pi]$ ;  
 c)  $\mathcal{D}_{\tan^{-1}} = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{R}_{\tan^{-1}} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .
- (7)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{x - 2} = 7$ .
- (8)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2}{x - x^2} = -1$ .
- (9)  $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{\sqrt{x} + 3} = \frac{1}{6}$ .
- (10)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{5x} = \frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = \frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{2x} = \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{2}{5}$ .
- (11)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 3) = 6$ . Så vi definierar
- $$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3} & \text{om } x \neq 3; \\ 6 & \text{om } x = 3. \end{cases}$$
- (12) Ekvationen har en lösning. Eftersom  $f(a) < 0 < f(b)$  så ger *satsen om mellanliggande värden* ger att det finns något  $c \in [a, b]$  sådant att  $f(c) = 0$ .

(13) Se motsvarande lösning för  $x \sin \frac{1}{x}$  i föreläsninganteckningarna 110511.