MA BREDDNING: NÅGRA REPUPPGIFTER INFÖR PROV 2

Materialet som vi passerat under veckorna 9 till 16 är stort men på prov 2 kommer vi att fokusera på det som varit mer eller mindre nytt för er. Observera att detta inte är ett testprov med avvägd sammantagen svårighetsgrad, utan uppgifterna är bara till för att påminna om dessa områden.

(1) Lös ekvationen $\sqrt{3x-2} = 2 - x$ för $x \in \mathbb{R}$.

(2) Lös ekvationen $z = \sqrt{5+12i}$.

(3) Partialbråksuppdela uttrycket $\frac{7x-6}{x(x-3)}$.

(4) Partialbråksuppdela uttrycket $\frac{3x+2}{x^2+4x-12}$.

(5) För polynomet $p(x) = x^4 - x^3 - 4x^2 - 2x - 12$ gäller att $p(i\sqrt{2}) = 0$. Lös ekvationen $p(x) = 0$ fullständigt.

(6) Skriv summan $5 + 8 + 11 + 14 + 17 + \cdots + 29$ med hjälp av Σ-notation.

(7) Lös ekvationen $\sum_{j=0}^{x} 3^j = 3280$.

(8) Avgör om följande serier konvergerar eller divergerar. Om de antar ett värde, beräkna då detta värde.

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{7}{5}\right)^k$

b) $\sum_{j=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^j$

(9) Kan $\star$ ersättas med något av tecknen $\Leftarrow, \Rightarrow, \iff$? Ange i så fall vilket (eller vilka).

a) $\sin x = \frac{1}{2} \quad \star \quad x = \frac{\pi}{6}$

b) $2x + 3 < 5x - 6 \quad \star \quad x > 3$

(10) Visa med hjälp av induktion att $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Svar

(1) $x = 1 \quad (x = 6$ är en falsk rot) .

(2) $z_1 = 3 + 2i, z_2 = -3 - 2i$.

(3) $\frac{2}{x} + \frac{5}{x-3}$.

(4) $\frac{1}{x-2} + \frac{2}{x+6}$.

(5) $x_1 = i\sqrt{2}; x_2 = -i\sqrt{2}; x_3 = -2; x_4 = 3$.

(6) Till exempel $\sum_{j=0}^{8}(5 + 3j)$.

(7) $x = 7$.

(8) a) Divergerar, ty $\left|-\frac{7}{5}\right| > 1$.

b) Konvergerar till $\frac{1}{12}$.

$$\sum_{j=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^j = \sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^j - \left(-\frac{1}{3}\right)^0 - \left(-\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} - 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

(9) a) $\Leftarrow$

b) $\iff$

(10) Vi kallar påståendet $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ för $(\star)$.

I. Då $n = 1$ får vi $VL = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$, $HL = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$. Så $VL = HL$ och $(\star)$ gäller då $n = 1$.

II. Antag att $(\star)$ gäller för något $n = m, m \geq 1$, dvs att

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{m}{m+1}.$$

Vi ska då visa att den även gäller för $n = m + 1$, dvs att

$$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{m+1}{m+2}.$$

Enligt antagandet ska vi alltså visa

$$\frac{m}{m+1} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} = \frac{m+1}{m+2} \tag{1}$$

Vi utvecklar VL i (1)

$$\frac{m}{m+1} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} = \frac{m(m+2)+1}{(m+1)(m+2)} = \frac{m^2+2m+1}{(m+1)(m+2)} =$$
$$= \frac{(m+1)^2}{(m+1)(m+2)} = \frac{m+1}{m+2}$$

och får att $VL = HL$.

III. Av induktionsaxiomet följer då att $(\star)$ gäller för alla $n \geq 1$.